Лекция 2 [ Общий вид и основная задача линейного программирования. Симплекс – метод ]

**Задачи линейного программирования**

В задачах, где выбор показателя эффективности (целевой функции) W определяется целевой направленностью операции, а ее условия известны заранее (детерминированный случай), показатель эффективности зависит только от двух групп параметров: заданных условий α и элементов решения х, т. е.

W=W(α, x).

В число заданных условий α входят и ограничения, налагаемые на элементы решения. Пусть решение х представляет собой совокупность n элементов решения x1, x2, ..., xn (иначе — n-мерный вектор):

х= (x1, x2, ..., xn).

Требуется найти такие значения x1, x2, ..., xn, которые обращают величину W в максимум или в минимум (т.е. «экстремум»).

Задачи нахождения значений параметров, обеспечивающих экстремум функции при наличии ограничений, наложенных на аргументы, называются задачами математического программирования.

Для задач линейного программирования характерно что:

а) показатель эффективности (целевая функция) W линейно зависит от

элементов решения x1, x2, ..., xn и

б) ограничения, налагаемые на элементы решения, имеют вид линейных равенств или неравенств относительно x1, x2, ..., xn.

Такие задачи встречаются на практике, например, при решении проблем, связанных с распределением ресурсов, планированием производства, организацией работы транспорта и т. д.

Приведем несколько примеров задач линейного программирования.

1. Задача о пищевом рационе.

Ферма производит откорм скота с коммерческой целью. Для простоты допустим, что имеется всего четыре вида продуктов: П1, П2, П3, П4; стоимость единицы каждого продукта равна соответственно c1, c2, с3, с4. Из этих продуктов требуется составить пищевой рацион, который должен содержать: белков — не менее b1 единиц; углеводов — не менее b2 единиц; жиров — не менее b3 единиц. Для продуктов П1, П2, П3, П4 содержание белков, углеводов и жиров (в единицах на единицу продукта) известно и задано в таблице 2.1, где aij (i=1, 2, 3, 4; j=1, 2, 3) — какие-то определенные числа; первый индекс указывает номер продукта, второй — номер элемента (белки, углеводы, жиры).

Требуется составить такой пищевой рацион (т. е. назначить количества продуктов П1, П2, П3, П4, входящих в него), чтобы условия по белкам, углеводам и жирам были выполнены и при этом стоимость рациона была минимальна.

Таблица 2.1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Продукт | Элементы | | |
| Белки | Углеводы | Жиры |
| П1 | а11 | а12 | а13 |
| П2 | а21 | а22 | а23 |
| П3 | а31 | а32 | а33 |
| П4 | а41 | а42 | а43 |

Составим математическую модель. Обозначим х1, х2, x3, x4 количества продуктов П1, П2, П3, П4, входящих в рацион. Показатель эффективности, который требуется минимизировать, — стоимость рациона (обозначим ее L); она линейно зависит от элементов решения х1, х2, x3, x4:

L = c1x1 + c2x2 + c3x3 + c4x4

Или

Вид целевой функции известен, и она линейна. Запишем теперь в виде формул ограничительные условия по белкам, углеводам и жирам.

a11x1 + a21x2 + a31x3 + a41x4 ≥ b1

a12x1 + a22x2 + a32x3 + a42x4 ≥ b2

a13x1 + a23x2 + a33x3 + a43x4 ≥ b3

Эти линейные неравенства представляют собой ограничения, накладываемые на элементы решения х1, х2, x3, x4.

Таким образом, поставленная задача сводится к следующей: найти такие неотрицательные значения переменных х1, х2, x3, x4, чтобы они удовлетворяли ограничениям — неравенствам (3.3) и одновременно обращали в минимум линейную функцию этих переменных:

**Основная задача линейного программирования (ОЗЛП)**

Любую задачу линейного программирования можно свести к стандартной форме, так называемой «основной задаче линейного программирования» (ОЗЛП), которая формулируется так: найти неотрицательные значения переменных x1, x2, ..., xn, которые удовлетворяли бы условиям-равенствам

a11x1 + a21x2 + … + an1xn = b1

a21x1 + a22x2 + … + a2nx2 = b2

…………………………………

am1x1 + am2x2 + … + amnxn = bm

и обращали бы в максимум линейную функцию этих переменных:

L = c1x1 + c2x2 + … + cnxn → max

Пусть требуется найти неотрицательные значения переменных х1, x2, x3, удовлетворяющие ограничениям-неравенствам

3x1 + 2x2 – x3 ≥ 4

x1 - 2x2 + 3x3 ≤ 10 (2.2)

и обращающие в максимум линейную функцию от этих переменных:

L = 4x1 - x2 + 2x3 → max

Приведем условия (2.2) к стандартной форме, так, чтобы знак неравенства был ≥, а справа стоял нуль. Получим:

(2.3)

Обозначим левые части неравенств (2.3) соответственно через y1 и y2:

y1 = 3x1 + 2x2 – x3 – 4

y2 = - x1 + 2x2 - 3x3 + 10 (2.4)

Из условий (2.3) и (2.4) видно, что новые переменные y1 и y2 также должны быть неотрицательными.

Требуется найти неотрицательные значения переменных х1, x2, x3, y1, y2 такие, чтобы они удовлетворяли условиям-равенствам (2.4) и обращали в максимум линейную функцию этих переменных. Перед нами — основная задача линейного программирования (ОЗЛП). Переход к ней от первоначальной задачи с ограничениями-неравенствами (2.2) «куплен» ценой увеличения числа переменных на два (число неравенств).

Всякая задача линейного программирования может быть сведена к стандартной форме ОЗЛП.

**Решение задач линейного программирования симплекс-методом**

В процессе производства постоянно возникают задачи определения оптимального плана производства продукции при наличии определенных ресурсов (сырья, полуфабрикатов, оборудования, финансов, рабочей силы) или проблемы оптимизации распределения неоднородных ресурсов на производстве. Рассмотрим возможную постановку такой задачи.

Постановка задачи

Для изготовления n видов изделий И1, И2, ..., Иn необходимы ресурсы m видов: трудовые, материальные, финансовые и др. Известно необходимое количество отдельного i-ro ресурса для изготовления каждого j-ro изделия.

Назовем эту величину нормой расхода. Пусть определено количество каждого вида ресурса, которым предприятие располагает в данный момент. Известна прибыль Пj, получаемая предприятием от изготовления каждого j-ro изделия. Требуется определить, какие изделия и в каком количестве должно изготавливать предприятие, чтобы обеспечить получение максимальной прибыли. Необходимая исходная информация представлена в таблице 2.5.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Используемые ресурсы | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов |
| И1 | И2 | И3 | И4 |
| Трудовые | 3 | 5 | 2 | 2 | 15 |
| Материальные | 4 | 3 | 3 | 5 | 9 |
| Финансовые | 5 | 4 | 4 | 8 | 30 |
| Прибыль Пj | 40 | 50 | 30 | 20 |  |

Построение математической модели.

Количество изделий j-ro наименования, которое может производить предприятие, обозначим через хj. Зная количество каждого вида i-го ресурса для изготовления отдельного j-ro типа изделия - норму расхода и количество каждого i-го ресурса (таблица 1), можно записать следующую систему неравенств:

3x1 + 5x2 + 2x3 + 7x4 ≤ 15

4x1 + 3x2 + 3x3 + 5x4 ≤ 9 (7.1)

5x1 + 6x2 + 4x3 + 8x4 ≤ 30

Полученную систему можно представить в виде совокупности равенств, если в каждое из неравенств ввести фиктивные изделия

(дополнительные переменные) х5, х6, х7, при изготовлении которых используют каждый оставшийся вид ресурса.

В этом случае система равенств примет такой вид:

3x1 + 5x2 + 2x3 + 7x4 + x5 = 15

4x1 + 3x2 + 3x3 + 5x4 + x6 = 9 (7.2)

5x1 + 6x2 + 4x3 + 8x4 + x7 = 30

Это преобразование необходимо для упрощения вычислительной процедуры в дальнейшем. Прибыль, получаемая от фиктивных изделий, принимается равной нулю.

Критерий оптимизации (суммарную величину прибыли) можно тогда представить так:

Y = 40x1 + 50x2 + 30x3 + 20x4 + 0x5 + 0x6 + 0x7 (7.3)

Граничные условия будут записаны следующим образом:

xj ≥ 0 (j =1, 2, …, 7) (7.4)

Совокупность системы ограничений (7.2), целевой функций (7.3) и граничных условий (7.4) образует математическую модель данной задачи.

Нахождение базисного решения.

Для решения данной задачи рассмотрим симплекс-метод. Для его использования необходимо определить начальный базис, то есть такое решение, которое удовлетворяет системе равенств (7.2).

В данной задаче для определения базиса требуется взять m неизвестных по числу уравнений в системе (7.2), желательно наиболее редко встречающиеся в ней. В нашей совокупности уравнений (m - 3) это х5, х6, х7, которые и выражаем через оставшиеся неизвестные х1, х2, х3, х4.

Систему уравнений необходимо записать в таком виде:

х5 = 15 - (Зх1 + 5х2 + 2х3 + 7х4)

х6 = 9 - (4x1 + 3х2 + 3х3 + 5х4) (5) х7 = 30 - (5x1 + 6х2 + 4х3 + 8x4)

Переменные, находящиеся в левой части системы уравнений, называются базисными (основными), а находящиеся справа - небазисными

(не основными). Для определения значений базисных переменных х5, х6, х7 необходимо приравнять к нулю небазисные х1, х2, х3, х4 и подставить их в

систему уравнений (5). Полученное таким образом решение называется базисным. Оно будет выглядеть следующим образом:

(х1, х2, х3, х4, х5, х6, х7) (0, 0, 0, 0, 15, 9, 30).

После определения начального базиса можно переходить непосредственно к использованию алгоритма симплекс-метода.

Решение задачи симплекс-методом.

1. Заполнение исходной симплекс-таблицы.

В соответствии с полученной системой уравнений и критерием оптимизации заполняем исходную симплекс-таблицу (таблица 7.2).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисные переменные | Свободные члены | Коэффициенты при базисных и небазисных переменных | | | | | | |
| xj | ai | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x5\* | 15 | 3 | 5\* | 2 | 7 | 1 | 0 | 0 |
| x6 | 9 | 4 | 3 | 3 | 5 | 0 | 1 | 0 |
| x7 | 30 | 5 | 6 | 4 | 8 | 0 | 0 | 1 |
| Пj | 0 | 40 | 50 | 30 | 20 | 0 | 0 | 0 |

2. Проверка базисного решения на оптимальность.

Просматриваются знаки коэффициентов при небазисных переменных в целевой функции (критерий оптимизации) - последняя строка таблицы 7.2.

Если все коэффициенты при небазисных переменных неположительны, то исходный базис является оптимальным; в противном случае переходят к следующему этапу. В нашей задаче решение не оптимально, так как все коэффициенты целевой функции при небазисных переменных положительны.

3. Проверка задачи на наличие решения.

Если при какой-либо небазисной переменной, имеющей

положительный коэффициент в целевой функции, окажется, что столбец коэффициентов при этой же переменной в системе уравнений состоит из одних неположительных чисел, то максимальное значение целевой функции стремится к бесконечности, то есть задача решений не имеет. В нашей задаче решение имеется.

4. Выбор из небазисных переменных той, которая способна при введении ее в базис увеличить значение целевой функции.

Наиболее простой и чаще всего используемый способ состоит в выборе той небазисной переменной, которой соответствует наибольший положительный коэффициент в целевой функции. В нашей задаче это переменная х2 (наибольший положительный коэффициент равен 50). Значит, х2 необходимо ввести в базис.

5. Определение базисной переменной, которая должна быть выведена из базиса.

Для всех положительных коэффициентов при вводимой в базис переменной в системе уравнений определяется отношение свободного члена уравнения к коэффициенту при вводимой в базис переменной. Для нашей задачи это будут следующие отношения: 15/5 = 3; 9/3 = 3; 30/6 = 5.

Минимальное из полученных отношений указывает строку, базисную переменную, которая должна быть выведена из базиса. При наличии нескольких одинаковых отношений берется любое. В нашей задаче выведем из базиса переменную х5.

6. Представление новой базисной переменной через небазисные.

Строится новая симплекс-таблица (таблица 7.3). Отмечается звездочкой строка и столбец в предыдущей симплекс-таблице (таблица 7.2), соответственно для выводимой из базиса и для вводимой в него переменной. Коэффициент, находящийся на пересечении строки и столбца, отмеченных звездочками, называется разрешающим и помечается звездочкой (таблица 7.2). Все коэффициенты строки, отмеченной звездочкой, делятся на разрешающий элемент, а результаты расчета заносятся в новую симплекс-таблицу. В нашей задаче на первой итерации разрешающий элемент равен 5 (таблица 7.2).

Результаты деления каждого элемента строки, отмеченной звездочкой, на разрешающий коэффициент заносятся в строку 1 новой таблицы (таблица 7.3).

7. Представление остальных базисных переменных и целевой функции через новый набор небазисных переменных.

Для этого коэффициенты в новой таблице при новой базисной переменной умножаются на такое число, чтобы после сложения с преобразуемой строкой предыдущей таблицы в столбце при новой базисной переменной в новой таблице появился ноль. Результаты сложения заносятся в новую симплекс-таблицу. Исходя из этого, для получения коэффициентов второй строки в новой таблица 7.3 умножаем коэффициенты при новой базисной переменной х2 (таблица 7.3) на число -3, складываем с соответствующими коэффициентами второй строки предыдущей симплекс-таблицы (таблица 7.2) и результаты расчета заносим во вторую строку новой таблицы (таблица 7.3).

Аналогичные преобразования проводим и для других строк.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисные переменные | Свободные члены | Коэффициенты при базисных и небазисных переменных | | | | | | |
| xj | ai | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x2 | 3 | 3/5 | 1 | 2/5 | 7/5 | 1/5 | 0 | 0 |
| x6\* | 0 | 11/5 | 0 | 9/5\* | 4/5 | -3/5 | 1 | 0 |
| x7 | 12 | 7/5 | 0 | 8/5 | -2/5 | -6/5 | 0 | 1 |
| Пj | -150 | 10 | 0 | 10 | -50 | -10 | 0 | 0 |

Поскольку в последней строке таблицы 7.3 в целевой функции не все коэффициенты при небазисных переменных неположительны, то решение не оптимально; следовательно, выполняется следующий итерационный цикл расчета и строится новая симплекс-таблица (таблица 7.4). Цикл расчета начинается с этапа 2 и проводится до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение.

В качестве вводимой в базис небазисной переменной берем х3 (можно x1) как имеющую наибольший положительный коэффициент. Отмечаем звездочкой столбец х3. В качестве выводимой из базиса переменной берем х6, так как для нее частное от деления свободного члена на соответствующий коэффициент минимально. Разрешающий множитель равен 9/5.

Результаты расчета представлены в таблице 7.4.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисные переменные | Свободные члены | Коэффициенты при базисных и небазисных переменных | | | | | | |
| xj | ai | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 |
| x2 | 3 | 1/9 | 1 | 0 | 1/9 | 1/3 | -2/9 | 0 |
| x3 | 0 | 11/9 | 0 | 1 | 4/9 | -3/9 | 5/9 | 0 |
| x7 | 12 | -5/9 | 0 | 0 | -10/9 | -2/3 | -8/9 | 1 |
| Пj | -150 | -20/9 | 0 | 0 | -490/9 | -20/3 | -50/9 | 0 |

Последняя строка таблицы не содержит положительных коэффициентов при небазисных переменных. Анализируя полученное решение, видим, что оно оптимально и выглядит так:

(х1, х2, х3, х4, х5, х6, х7) (0, 3, 0, 0, 0, 0, 12).

Из полученного решения видно, что изделия ИI, И3 и И4 предприятие изготавливать не должно. Цифра в переменной x2 определяет изделие, планируемое для изготовления, следовательно, предприятие будет производить только второе изделие в количестве 3 единиц.

Оптимальное распределение ресурсов обеспечит получение максимальной прибыли Y, которая составит 150 единиц.

При этом материальные и трудовые ресурсы будут задействованы полностью, а финансовые - недоиспользованы на 12 единиц.

Сжатый  
  
\*\*Лекция 2: Общий вид и основная задача линейного программирования. Симплекс-метод\*\*

### Задачи линейного программирования

Задачи линейного программирования (ЛП) направлены на нахождение экстремума (максимума или минимума) целевой функции \( W = W(\alpha, x) \), где \( \alpha \) — заданные параметры, а \( x = (x\_1, x\_2, \dots, x\_n) \) — переменные решения. В этих задачах целевая функция линейно зависит от переменных \( x\_i \), а ограничения представлены в виде линейных равенств или неравенств. Такие задачи широко применяются в распределении ресурсов, планировании производства, транспорте и других областях.

### Пример: Задача о пищевом рационе

Рассмотрим ферму, которая производит корм для скота, используя четыре вида продуктов П1, П2, П3, П4 с соответствующими стоимостями \( c\_1, c\_2, c\_3, c\_4 \). Необходимо составить рацион, содержащий минимум заданное количество белков (\( b\_1 \)), углеводов (\( b\_2 \)) и жиров (\( b\_3 \)). Содержание питательных веществ в продуктах представлено таблицей:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Продукт | Белки | Углеводы | Жиры |  |
|  | П1 | a11 | a12 | a13 |  |
|  | П2 | a21 | a22 | a23 |  |
|  | П3 | a31 | a32 | a33 |  |
|  | П4 | a41 | a42 | a43 |  |

Математическая модель задачи формулируется как:

https://latex2image-output.s3.amazonaws.com/img-BXwVEah53MTU.png

при условиях:

Цель — минимизировать стоимость рациона при выполнении всех заданных условий.

### Основная задача линейного программирования (ОЗЛП)

Любую задачу ЛП можно привести к стандартной форме ОЗЛП:

\[

\begin{align\*}

\text{найти } &x\_1, x\_2, \dots, x\_n \geq 0, \\

\text{при условиях: } &a\_{11}x\_1 + a\_{21}x\_2 + \dots + a\_{m1}x\_n = b\_1, \\

&\dots \\

&a\_{1n}x\_1 + a\_{2n}x\_2 + \dots + a\_{mn}x\_n = b\_m, \\

&L = c\_1x\_1 + c\_2x\_2 + \dots + c\_nx\_n \rightarrow \max.

\end{align\*}

\]

Для преобразования неравенств в равенства часто вводятся дополнительные переменные (фиктивные).

### Пример: Распределение ресурсов и прибыли

Рассмотрим производство \( n \) видов изделий \( I\_1, I\_2, \dots, I\_n \), требующих \( m \) типов ресурсов. Известны нормы расхода ресурсов на каждое изделие и доступное количество ресурсов. Прибыль \( P\_j \) с каждого изделия известна. Задача заключается в определении количества изделий для максимизации общей прибыли при ограниченных ресурсах. Математическая модель включает целевую функцию прибыли и систему ограничений по ресурсам.

### Симплекс-метод: решение задачи линейного программирования

Симплекс-метод — эффективный итерационный алгоритм для нахождения оптимального решения задачи ОЗЛП. Основные этапы метода:

1. \*\*Начальное базисное решение\*\*: Выбор начального набора базисных переменных, соответствующих системе равенств. Это достигается путем введения дополнительных переменных (например, фиктивных).

2. \*\*Симплекс-таблица\*\*: Формирование начальной симплекс-таблицы, включающей базисные переменные, свободные члены и коэффициенты при переменных.

3. \*\*Проверка оптимальности\*\*: Анализ коэффициентов целевой функции в последней строке таблицы. Если все коэффициенты при небазисных переменных неположительны (для задачи максимизации), текущее решение оптимально.

4. \*\*Выбор вводимой переменной\*\*: Если есть положительные коэффициенты, выбирается небазисная переменная с наибольшим положительным коэффициентом в целевой функции — она вводится в базис.

5. \*\*Определение выводимой переменной\*\*: Для каждой базисной строки вычисляется отношение свободного члена к коэффициенту вводимой переменной. Минимальное из положительных отношений указывает, какая базисная переменная выводится из базиса.

6. \*\*Построение новой симплекс-таблицы\*\*: Использование выбранного разрешающего элемента для нормализации строки и преобразования остальных строк, обеспечивая нули в столбце вводимой переменной вне строки с разрешающим элементом.

7. \*\*Повторение\*\*: Процесс продолжается, пока все коэффициенты при небазисных переменных в целевой функции не станут неположительными, что означает достижение оптимального решения.

### Пример работы симплекс-метода

Рассмотрим задачу с продукцией и ресурсами. Начальное базисное решение включает фиктивные переменные \( x\_5, x\_6, x\_7 \). В симплекс-таблице проверка оптимальности выявляет необходимость перехода к следующей итерации. Выбирается переменная \( x\_2 \) для ввода в базис, и переменная \( x\_5 \) выводится из базиса. Новая симплекс-таблица формируется путем нормализации строки ввода и обновления остальных строк. Процесс повторяется, пока не будет достигнуто оптимальное решение.

В данном примере оптимальное решение состоит в производстве 3 единиц второго изделия \( x\_2 = 3 \), при максимальной прибыли 150 единиц. В этом решении некоторые ресурсы используются полностью, а другие — частично.

### Заключение

Симплекс-метод является мощным инструментом для решения задач линейного программирования, обеспечивая эффективное нахождение оптимальных решений при линейных целевых функциях и ограничениях. Правильная постановка задачи и использование математической модели позволяют применять симплекс-метод для оптимизации распределения ресурсов, планирования производства и решения других задач, требующих максимизации или минимизации при заданных условиях. Метод итеративно улучшает базисное решение до достижения оптимума, делая его незаменимым в прикладных областях экономики, инженерии и управления.